**17. Условные распределения, условные математические ожидания**

Рассмотрим две дискретные случайные величины: со значениями , и , принимающую значения . Совместное распределение этих случайных величин есть набор вероятностей

(см. определение в ТВ11), а их распределения по отдельности задаются вероятностями

и .

Здесь удобно будет использовать следующее представление дискретной случайной величины ,

где обозначает индикатор множества ,

;

математическое ожидание:

Зафиксируем некоторое событие и рассмотрим условные вероятности ; эти вероятности составляют распределение, поскольку

Если в математическом ожидании случайной величины заменить на эти условные вероятности, то получим конструкцию , которую естественно назвать условным математическим ожиданием.

**Определение.** Условным математическим ожиданием случайной величины при условии называется

Легко проверить, что при фиксированном *k* это выражение действительно дает математическое ожидание. Если случайные величины и независимы, то условное математическое ожидание совпадает с обычным: Таким образом, мы получили условное распределение случайной величины и ее условное математическое ожидание.

Выражение ( ) определяет некоторую функцию от случайной величины ; обозначим эту функцию : . Иначе это можно записать в виде равенства, определяющего дискретную случайную величину:

**Определение.** Условным математическим ожиданием относительно называется дискретная случайная величина

Основные свойства условного математического ожидания сформулируем в теореме,

**Теорема 17.1.** Справедливы следующие свойства условного математического ожидания:

1) Если случайные величины и независимы, то является вырожденной   
 случайной величиной, .

2) Повторное математическое ожидание равно обычному: .

3) Если *f* – некоторая заданная функция, то

**Доказательство.** Первое утверждение очевидно. Второе следует из свойств математического ожидания и условной вероятности,

Третье свойство также получается непосредственно:

Условное распределение для непрерывного распределения построим, исходя из аналогии с дискретным случаем. Пусть и имеют плотность совместного распределения , соответственно, - плотность для , а - для . В определении условного математического ожидания ( ) заменим формально на , на , тогда, выполняя вместо суммирования интегрирование, получим выражение

, которое естественно принять в качестве определения условного математического ожидания.

**Определение.** Если и имеют плотность совместного распределения , то условным математическим ожиданием случайной величины при условии назовем

Функцию

назовем плотностью условного распределения при условии ; тогда условное математическое ожидание ( ) можно записать в виде интеграла от условной плотности:

Полученное таким образом условное математическое ожидание есть некоторая функция переменной *y*.

**Определение.** Условным математическим ожиданием непрерывной случайной величины относительно непрерывной называется случайна величина , где функция определенаравенством ( ).

**Упражнение 17.1.** Доказать утверждения Теоремы 17.1. для условного математического ожидания непрерывных случайных величин.

**Пример 17.1.** Рассмотрим важный для будущего пример вычисления условного математического ожидания: пусть случайные величины имеют двумерное нормальное распределение ( ).

Для краткости будем считать, что математические ожидания равны 0, выполнив очевидное линейное преобразование. Подставляя в ( ) формулы для

и , запишем плотность условного распределения,

где квадратичная форма

Выделив в квадратных скобках полный квадрат относительно переменной *x*,

получаем

Поставляя полученное выражение в формулу для условной плотности и возвращая ненулевые математические ожидания , убеждаемся в том, что получена плотность гауссовского распределения

Итак, для случайных величин, имеющих совместное нормальное распределение, условное распределение также является нормальным с математическим ожиданием

(условное математическое ожидание относительно ) и дисперсией

Полученные соотношения в математической статистике будут упоминаться как уравнения нормальной регрессии.